Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – analyse

Mercredi 9 mai 2018 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[50 points]**.

2218 – 7222

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 10]

(a) Étant donné que $n > \ln n$ pour $n > 0$, utilisez le critère de comparaison pour montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$ est divergente. [3]

(b) Trouvez l'intervalle de convergence pour $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{\ln(n+2)}$. [7]

2. [Note maximale : 6]

La fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|+1 & x < 2 \\ ax^2 + bx & x \geq 2 \end{cases}$$

où a et b sont des constantes réelles.

Étant donné que f et sa dérivée sont toutes deux continues en $x = 2$, trouvez la valeur de a et la valeur de b.

3. [Note maximale : 11]

(a) Trouvez la valeur de $\int_4^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$. [3]

(b) Illustrez graphiquement l'inégalité $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_4^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x < \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. [4]

(c) À partir de là, écrivez une borne inférieure pour $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. [1]

(d) Trouvez une borne supérieure pour $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. [3]

4. [Note maximale : 11]

La fonction f est définie par $f(x) = (\arcsin x)^2$, $-1 \le x \le 1$.

(a) Montrez que $f'(0) = 0$. [2]

La fonction f satisfait l'équation $\left(1 - x^2\right) f''(x) - xf'(x) - 2 = 0$.

(b) En trouvant deux fois la dérivée de l'équation ci-dessus, montrez que

$$\left(1 - x^2\right) f^{(4)}(x) - 5xf^{(3)}(x) - 4f''(x) = 0$$

où $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$ désignent respectivement la 3e et la 4e dérivée de $f(x)$. [4]

(c) À partir de là, montrez que la série de Maclaurin pour $f(x)$, jusqu'au terme en x^4 inclusivement, est $x^2 + \frac{1}{3}x^4$. [3]

(d) Utilisez l'approximation de cette série pour $f(x)$ avec $x = \frac{1}{2}$ pour trouver une valeur approchée de π^2. [2]

5. [Note maximale : 12]

Considérez l'équation différentielle $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x^p + 1$, où $x \in \mathbb{R}, x \ne 0$ et p est un entier strictement positif, $p > 1$.

(a) Résolvez l'équation différentielle, étant donné que $y = -1$ lorsque $x = 1$. Donnez votre réponse sous la forme $y = f(x)$. [8]

(b) (i) Montrez que la ou les abscisses des points sur la courbe $y = f(x)$ pour lesquels $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ satisfont l'équation $x^{p-1} = \frac{1}{p}$.

(ii) Déduisez l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles il y a deux points sur la courbe $y = f(x)$ où $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Donnez une raison pour votre réponse. [4]